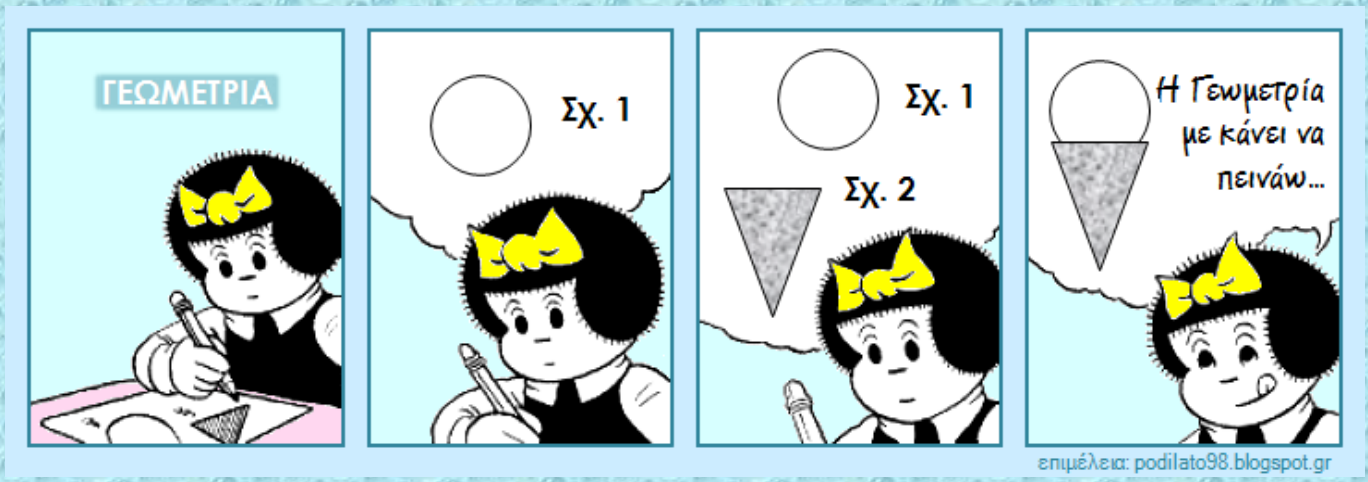
Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

Μεθοδική Επανάληψη



2017-18

www. .gr

Η επανάληψη των Μαθηματικών βήμα - βήμα

Μέρος Α΄

Κεφάλαιο 1ο – *Εξισώσεις*

1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

1. Τι ονομάζεται μεταβλητή;

Απάντηση

Ένα γράμμα που παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται μεταβλητή.

2. Τι ονομάζεται Αριθμητική παράσταση και τι Αλγεβρική παράσταση;

Απάντηση

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, αριθμητική παράσταση.
Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται αλγεβρική παράσταση.

3. Τι είναι η αναγωγή ομοίων όρων;

Απάντηση

Είναι η διαδικασία με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις αλγεβρικές παραστάσεις.

Βασικές ασκήσεις

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:

α) $A=3(x+2y)-2(2x+y)$, όταν $x=1,\ y=-2$

β) $B=5(2\alpha-3\beta)+3(4\beta-\alpha)$, όταν $\alpha=-3,\ \beta=5$.

1.2. Εξισώσεις α΄ βαθμού

4. Τι συμβαίνει σε μια ισότητα, αν προσθέσουμε και στα δυο μέλη της τον ίδιο αριθμό ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή αν $\sim Z$ τότε $\sim H+Z+H+$.

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή αν $\sim Z$ τότε $\sim J+Z+J+$

5. Τι συμβαίνει σε μια ισότητα, αν πολλαπλασιάσουμε και στα δυο μέλη της τον ίδιο αριθμό ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή αν $\sim Z$ τότε $\sim\check{+}+Z+\check{+}$

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή αν $\sim Z$ τότε $\frac{\sim}{+}Z\frac{}{+}$ με $+\div\mathbf{0}$.

6. Τι ονομάζεται εξίσωση;

Απάντηση

Μια ισότητα που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται εξίσωση.

Βασικές ασκήσεις

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{2x+3}{2}=\frac{3x-5}{4}$ **β)** $\frac{x+4}{5}-\frac{x-4}{3}=\frac{1-3x}{15}-2$ **γ)** $\frac{y-1}{3}-\frac{2y+7}{6}=y+\frac{1-3y}{2}$

δ) $\frac{1}{4}(\omega+4)-7=(1-\omega)\frac{1}{7}+\frac{\omega-23}{4}$ **ε)** $\frac{\frac{1+x}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

3. Δίνεται η εξίσωση $\mu(x+6)-2=(2\mu-1)x+2$

α) Αν $\mu=2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x=8$.

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x=7$, να αποδείξετε ότι $\mu=3$.

γ) Αν $\mu=1$, να λύσετε την εξίσωση.

1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Βασικές ασκήσεις

4. Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.

5. Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου;

6. Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

7. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 8 m και 12 m. Για να διπλασιάσουμε το εμβαδόν του, αυξάνουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 4 m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε τη μικρότερη διάσταση;

8. Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2 € την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26 € λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.

Κεφάλαιο 2ο – *Πραγματικοί αριθμοί*

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

7. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α; Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα του μηδέν και γιατί;

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0}=0$.

8. Αν $\sqrt{\sim}$ Z x , τότε τι συμπεραίνουμε για τον αριθμό x; Με τι ισούται το Ξ$\sqrt{\sim}$Ρ^2 , όπου ~ ñ 0 ;

Απάντηση

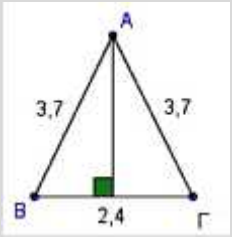
Είναι $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$, $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

Βασικές ασκήσεις

9. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$ **β)** $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = 2$ **γ)** $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}} = 3$

10. Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



2.2. Άρρητοι αριθμοί-Πραγματικοί αριθμοί

9. Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;

Απάντηση

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών. Δηλαδή ο χ είναι ρητός, αν $x = \frac{\mu}{\nu}$ όπου μ,ν ακέραιοι αριθμοί και ο ν είναι διαφορετικός του μηδενός. Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, είναι άρρητος.

10. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών από ποιούς αριθμούς αποτελείται;

Απάντηση

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους.

Βασικές ασκήσεις

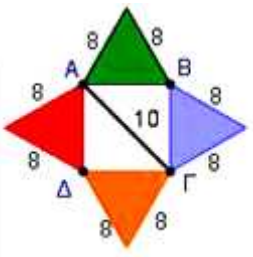
11. Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς: $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, 1, \sqrt{2}$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 0$ **β)** $x^2 = 5$ **γ)** $x^2 = -3$ **δ)** $x^2 = 17$

2.3. Προβλήματα

13. Το ανάπτυγμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιός του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές του είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



14. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

Κεφάλαιο 3ο – *Συναρτήσεις*

3.1.Η έννοια της συνάρτησης

11.Τι λέγεται συνάρτηση;

Απάντηση

Συνάρτηση λέγεται μια σχέση με την οποία κάθε τιμή μιας μεταβλητής χ αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή μιας μεταβλητής y.

Βασικές ασκήσεις

15.Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%.
Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

16.Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € το μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y, που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση

12.Τι λέγεται τετμημένη, τι τεταγμένη και τι συντεταγμένες ενός σημείου;

Απάντηση

Σε κάθε σημείο αντιστοιχούμε ένα ζεύγος αριθμών (x,y). Ο πρώτος αριθμός (x) ονομάζεται τετμημένη και ο δεύτερος (y) τεταγμένη. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται συντεταγμένες του σημείου.

13.Τι είναι το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;

Απάντηση

Είναι δύο κάθετοι άξονες με κοινή αρχή και την ίδια μονάδα μέτρησης.

14.Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

15.Ποιο χαρακτηριστικό γνώρισμα έχουν οι συντεταγμένες των σημείων των αξόνων;

Απάντηση

Κάθε σημείο του άξονα x'x έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα y'y έχει τετμημένη 0.

16.Από ποιον τύπο υπολογίζεται η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$;

Απάντηση

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

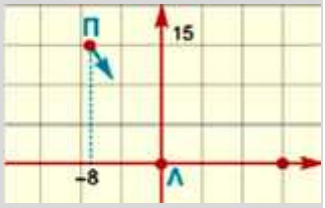
Βασικές ασκήσεις

17.Δίνονται τα σημεία $A(-3,4)$ και $B\left(2,-\frac{7}{2}\right)$. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις

συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα χ΄χ, τον άξονα y΄y και την αρχή Ο των αξόνων.

18. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων $A(3,5)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(0,-4)$ από τους άξονες x΄x και y΄y.

19. Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ. Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι (-8, 15).
Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;



3.3. Η συνάρτηση y = αx

17. Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

18. Τι σχήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx; Τι εξίσωση έχει ο άξονας x΄x;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Ο άξονας x' x είναι η ευθεία με εξίσωση y= 0x, δηλαδή y = 0.

19. Τι ονομάζεται κλίση της ευθεία y = αx;

Απάντηση

Κλίση της ευθείας y = αx είναι ο αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

Βασικές ασκήσεις

20. Γνωρίζοντας ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα :
α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.
β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

x	1	2	5		
y		6		21	30

21. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες: y = 2x, y = 3x και y = 5x.

22. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(2, 6).

23. Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων μια ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και να έχει κλίση 3/2.

24. Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και από το σημείο Α(-1, 3).

25. Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' ένα χρόνο.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών x.

β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.
γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:
i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €
ii) Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.

3.4. Η συνάρτηση y = αx + β

20.Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx + β; Τι λέγεται κλίση της;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της $y = \alpha x + \beta$, $\beta \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha x$, που διέρχεται από το σημείο (0, β) του άξονα y΄y.
Ο αριθμός α, που είναι η κλίση της ευθείας $y = \alpha x$, λέγεται και κλίση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$.

21.Τι παριστάνει μια εξίσωση της μορφής αx + βy = γ με α ÷ 0 ή β ÷ 0; Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας τέτοιας εξίσωσης με τους άξονες;

Απάντηση

Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
Γνωρίζουμε ότι ο άξονας x'x έχει εξίσωση y = 0. Επομένως, για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα x'x, θέτουμε y = 0 και υπολογίζουμε την τετμημένη του x.
Γνωρίζουμε ότι ο άξονας y΄y έχει εξίσωση x = 0. Επομένως, για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα y' y, θέτουμε x = 0 και υπολογίζουμε την τεταγμένη του y.

Βασικές ασκήσεις

26.Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση y = - 3x + 2, όταν:
α) ο χ είναι πραγματικός αριθμός **β)** $x \geq 0$ **γ)** $-2 \leq x \leq 5$

27.Στο σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΑΒ είναι $\sqrt{5}$.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = 2x – 1 διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

28.Δίνεται η ευθεία με εξίσωση 2x – 3y = 6. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες.

29.Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας x + y = 2.

30.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες y = 2, y = 3, x = 1 και x = –2. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ; Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

31.Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος 200 € το τεμάχιο. Επίσης, πληρώνει 100 € την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.
α) Να εκφράσετε το συνολικό ημερήσιο κόστος y του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού x των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει ημερησίως.
β) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

3.5. Η συνάρτηση $y \sim \frac{1}{x}$ - Υπερβολή

22.Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά χ και y λέγονται αντιστρόφως ανάλογα, όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.

23.Ποια είναι η συνάρτηση που εκφράζει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και γιατί;

Απάντηση

Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y, τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$.

24.Πως λέγεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y \sim \frac{1}{x}$, $\alpha \div 0$;Από τι αποτελείται και που βρίσκονται τα σημεία της; Ποιες ιδιότητες έχει η γραφική της παράσταση;

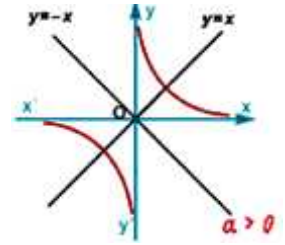
Απάντηση

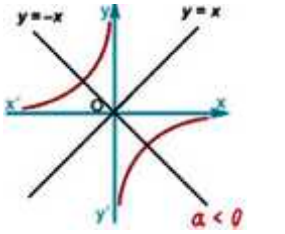
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ λέγεται υπερβολή και αποτελείται από

- Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α > 0**.
- Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α < 0**.

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις y = x και y = –x.





Βασικές ασκήσεις

32.Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	6	12
y			4			

33.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $y = \frac{12}{x}$ και $y = -\frac{12}{x}$.

34.Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 36cm².

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y								

α) Ονομάζοντας x και y τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα. Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη x και y;
β) Να εκφράσετε το πλάτος y ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους x.
γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Κεφάλαιο 4ο – *Περιγραφική Στατιστική*

4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

25.Τι ονομάζεται πληθυσμός και τι μεταβλητή;

Απάντηση

Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται πληθυσμός. Το χαρακτηριστικό (π.χ. η ομάδα προτίμησης στο ποδόσφαιρο) ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται μεταβλητή.

26.Τι ονομάζεται δείγμα; Τι είναι το μέγεθος του δείγματος;

Απάντηση

Δείγμα είναι ένα μέρος του πληθυσμού. Μέγεθος του δείγματος είναι το πλήθος των ατόμων που αποτελούν το δείγμα που επιλέξαμε.

27.Τι ονομάζεται δειγματοληψία;

Απάντηση

Δειγματοληψία λέγεται η διαδικασία με την οποία επιλέγουμε το δείγμα που θα μελετήσουμε.

28.Τι ονομάζεται απογραφή;

Απάντηση

Απογραφή λέγεται η διαδικασία με την οποία συγκεντρώνονται στοιχεία απ' όλα τα άτομα του πληθυσμού σε μία καθορισμένη ημερομηνία.

Βασικές ασκήσεις

35.Σ' ένα σχολείο φοιτούν 120 αγόρια και 180 κορίτσια. Στη Β' Γυμνασίου φοιτούν συνολικά 90 άτομα.
α) Ποιο είναι το ποσοστό των κοριτσιών στο σχολείο;
β) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών της Β' Γυμνασίου;

4.2. Γραφικές παραστάσεις

29.Τι είναι το εικονόγραμμα; Ποια στοιχεία πρέπει απαραίτητα να έχει ένα τέτοιο διάγραμμα;

Απάντηση

Στα εικονογράμματα χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας.
Σ' ένα τέτοιο διάγραμμα, βέβαια, πρέπει να υπάρχει ο τίτλος που μας κατατοπίζει για το είδος και τη μεταβλητή της έρευνας, η κλίμακα που δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα καθώς και ο τίτλος κάθε στήλης.

30.Τι είναι το ραβδόγραμμα; Ποια στοιχεία πρέπει απαραίτητα να έχει ένα τέτοιο διάγραμμα;

Απάντηση

Στα ραβδογράμματα χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας.

Σ’ ένα ραβδόγραμμα πρέπει, βέβαια, να υπάρχουν ο τίτλος του που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων.

31.Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα;

Απάντηση

Στο κυκλικό διάγραμμα το δείγμα παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς διαφορετικού συνήθως χρώματος.

32.Τι είναι το χρονόγραμμα;

Απάντηση

Το χρονόγραμμα είναι διάγραμμα που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.

Βασικές ασκήσεις

36.Σε μία αποθήκη υπάρχουν τέσσερις τύποι κινητών τηλεφώνων Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 30%, 40%, 20% αντίστοιχα.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

β) Να βρείτε πόσα κινητά τηλέφωνα υπάρχουν από κάθε τύπο, αν ο συνολικός τους αριθμός είναι 400.

37.Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου πόσες ημέρες απουσίασαν από το σχολείο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Αριθμός ημερών	Αριθμός μαθητών
0	35
1	12
2	8
3	2
4	
ΣΥΝΟΛΟ	60

α) Πόσοι μαθητές απουσίασαν 4 ημέρες; Τι ποσοστό αποτελούν αυτοί οι μαθητές;

β) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

4.3. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

33.Τι λέγεται συχνότητα μιας τιμής;

Απάντηση

Συχνότητα μιας τιμής, ονομάζεται το πλήθος των εμφανίσεων της τιμής αυτής μέσα στο δείγμα.

34.Τι λέγεται σχετική συχνότητα μιας τιμής;

Απάντηση

Σχετική συχνότητα μιας τιμής είναι το πηλίκο της συχνότητας της τιμής αυτής προς το πλήθος όλων των παρατηρήσεων. Στη συνέχεια, εκφράζουμε τον αριθμό αυτό ως ποσοστό επί τοις εκατό (%).

35.Με τι είναι ίσο το άθροισμα όλων των συχνοτήτων και με τι το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών ενός δείγματος;

Απάντηση

Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.
Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 100.

Βασικές ασκήσεις

38.Ο αριθμός των μηνυμάτων που έστειλε ανά ημέρα τον Ιούλιο ο Τάκης, είναι:

4 , 5 , 2 , 1 , 5 , 4 , 0 , 4 , 7 , 3 , 5 ,2 , 2 , 6 , 5 , 3 , 2 , 3 ,
1 , 7 , 6 , 4 , 5 , 3 , 3 , 2 , 2 , 4 , 2 , 5 , 2 .

α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να βρείτε πόσες ημέρες τα μηνύματα ήταν περισσότερα από 3.
γ) Να βρείτε το ποσοστό των ημερών στις οποίες τα μηνύματα ήταν το πολύ 3.
δ) Να παραστήσετε την κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

4.5. Μέση τιμή - Διάμεσος

36.Πως βρίσκουμε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων ενός δείγματος;

Απάντηση

Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

37.Πως βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων ενός δείγματος;

Απάντηση

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, παίρνουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση.
Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Βασικές ασκήσεις

39.Το ύψος των 12 παικτών της ομάδας μπάσκετ της ΑΕΚ είναι σε cm:
192, 197, 197, 198, 198, 200, 200, 201, 201, 204, 205, 206.
α) Να βρείτε το μέσο ύψος της ομάδας.
β) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών της ομάδας.
γ) Αν ο παίκτης με ύψος 192 cm αντικατασταθεί από άλλον ύψους 200 cm, ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας;

Μέρος Β΄

Κεφάλαιο 1ο – *Εμβαδά επίπεδων σχημάτων- Πυθαγόρειο θεώρημα*

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

38.Τι είναι το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας και τι εκφράζει;

Απάντηση

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών

39.Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης επιφανειών(εμβαδού);Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της και ποια τα πολλαπλάσιά της και ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;

Απάντηση

Η βασική μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το 1 τετραγωνικό μέτρο (m^2)
Υποδιαιρέσεις είναι: το τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (dm^2), το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2) και το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο.
Η σχέση που τα συνδέει είναι: **$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2 = 1.000.000\ mm^2$**
Πολλαπλάσια είναι:
το τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) με **$1\ km^2 = 1000 \cdot 1000 = 1.000.000\ m^2$**
και το στρέμμα με **1 στρέμμα = $1000\ m^2$**

Βασικές ασκήσεις

40. Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τις κατατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
α) 13850 mm^2, 0,23 m^2, 0,48 m^2, 670 cm^2, 13,7 dm^2.
β) 32 dm^2, 1,23 m^2, 23270 mm^2, 1356 cm^2.

1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

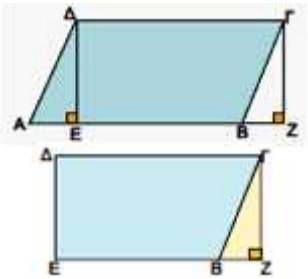
40. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α και ενός ορθογωνίου με πλευρές α και β;

Απάντηση

Το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς α είναι α^2 και του ορθογωνίου με πλευρές α και β είναι $\alpha \cdot \beta$.

41. Να εξηγήσετε γιατί το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με βάση β και αντίστοιχο ύψος υ είναι ίσο με $\beta \cdot \upsilon$.

Απάντηση

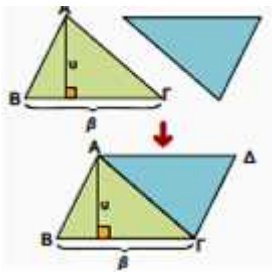


Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση ΑΒ = β = ΓΔ και ας φέρουμε τα ύψη του ΔΕ = υ και ΓΖ = υ. Μεταφέροντας το τρίγωνο ΑΔΕ στη θέση τού (ίσου με αυτό) τριγώνου ΒΓΖ, παρατηρούμε ότι:
το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΓΔ.
Άρα: (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΓΔ) = ΕΖ · ΓΖ = β · υ.

42. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.
Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ που δεν είναι ορθογώνιο και ας πάρουμε και άλλο ένα τρίγωνο ίδιο με αυτό. Αν τοποθετήσουμε το δεύτερο τρίγωνο δίπλα στο πρώτο, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα, τότε θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, που θα έχει ως βάση β, τη βάση ΒΓ του ΑΒΓ και ως ύψος υ, το ύψος του ΑΒΓ, από την κορυφή Α. Είτε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο είτε είναι αμβλυγώνιο, το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που σχηματίζεται, αν τοποθετήσουμε άλλο ένα τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.

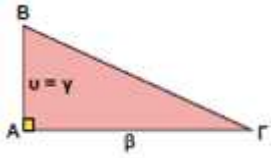


Επομένως, θα ισχύει: $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$, όπου β η βάση του ΑΒΓ και υ το αντίστοιχο ύψος.

43. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.
Όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, τότε η μία από τις κάθετες πλευρές είναι η βάση β και η άλλη το ύψος του.

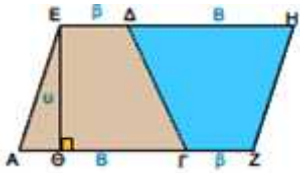


Επομένως: $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$

44. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του με το ύψος του.

Απάντηση

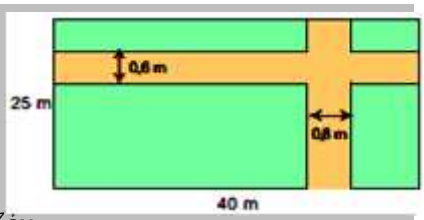
Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ. Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (β + Β) και ύψος υ. Επομένως: $(\text{AZHE}) = (\beta + \text{B}) \cdot \upsilon$.



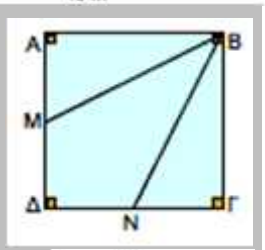
Όμως: $(\text{AZHE}) = 2(\text{ΑΓΔΕ})$, άρα $(\text{ΑΓΔΕ}) = \frac{(\beta + \text{B}) \cdot \upsilon}{2}$

Βασικές ασκήσεις

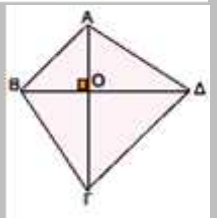
41. Ένας ορθογώνιος κήπος έχει διαστάσεις 40 m και 25 m. Τον κήπο διασχίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους δρομάκια. Το ένα παράλληλο προς τη μεγάλη πλευρά του κήπου με πλάτος 0,6 m και το άλλο με πλάτος 0,8 m. Το υπόλοιπο τμήμα θα φυτευτεί με γκαζόν. Να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής του γκαζόν, αν ο γεωπόνος χρεώνει 12 € κάθε m^2 γκαζόν.



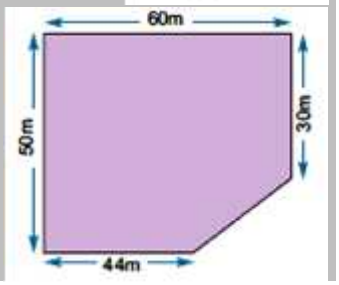
42. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι Μ και Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΔΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΝΓΒ έχουν ίσα εμβαδά.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΜΔΝ έχει εμβαδόν όσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω τριγώνων.



43. Στο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος οι διαγώνιες είναι κάθετες. Αν ΒΔ=5 cm,ΟΑ=3cm και ΟΓ=6cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου.



44. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.
α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.
β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m^2 χώρο;



1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

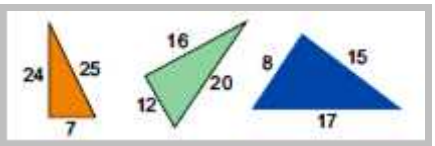
45.Να γράψετε το πυθαγόρειο θεώρημα καθώς και το αντίστροφό του.

Απάντηση

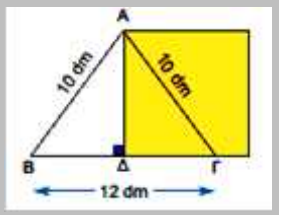
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
Αντίστροφο: Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι
από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Βασικές ασκήσεις

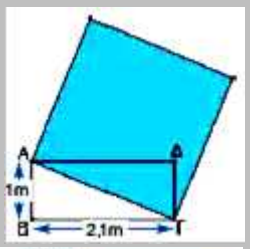
45.Να αποδείξετε ότι τα διπλανά τρίγωνα είναι ορθογώνια.



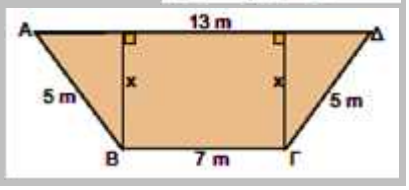
46.Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 10 dm και ΒΓ = 12 dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.



47.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογώνιου ΑΒΓΔ.



48.Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με πλευρές:
ΓΔ = ΑΒ = 5 m, ΒΓ = 7 m και ΑΔ = 13 m.
Να υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.



Κεφάλαιο 2ο – *Τριγωνομετρία*

2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

46.Τι ονομάζεται εφαπτομένη οξείας γωνίας ω ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω.

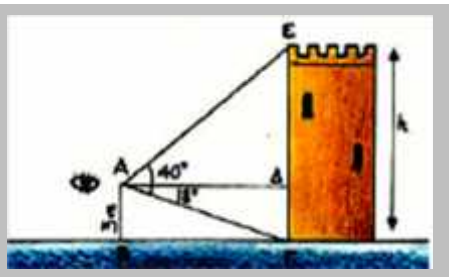
47.Τι είναι η κλίση α μιας ευθείας y = αx;

Απάντηση

Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha x$ είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

Βασικές ασκήσεις

49. Ένας τουρίστας βλέπει την κορυφή ενός πύργου από σημείο Α με γωνία 40° και τη βάση του πύργου με γωνία 18°. Αν γνωρίζετε ότι ΑΒ = 3 m, να υπολογίσετε το ύψος h του πύργου.
Δίνεται ότι εφ18°= 0,32 και εφ40°= 0,84.



2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

48. Τι λέγεται ημίτονο και τι συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου; Ποιους περιορισμούς ικανοποιούν;

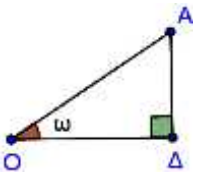
Απάντηση

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω.
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω.
Είναι $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$.

49. Να αποδείξετε ότι $\text{£}^{\cdot\cdot}\,\mu\,Z\,\frac{\text{¦}\,\text{«}\mu}{\pm^{3}\neg\mu}$.

Απάντηση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ με τη γωνία Δ ορθή και $\hat{O} = \omega$.



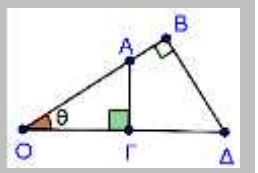
Είναι $\eta\mu\omega = \frac{A\Delta}{OA}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{O\Delta}{OA}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{A\Delta}{O\Delta}$.

Είναι $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{A\Delta}{\cancel{OA}}}{\frac{O\Delta}{\cancel{OA}}} = \frac{A\Delta}{O\Delta} = \varepsilon\varphi\omega$

Βασικές ασκήσεις

55. Δίνεται μια οξεία γωνία ω. Να αποδείξετε ότι:
α) $2 + 5\eta\mu\omega < 7$ **β)** $4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 2$ **γ)** $5\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 8$

56. Στο διπλανό σχήμα είναι: ΟΑ= 10 m, ΟΒ = 12 m και ΟΓ = 8 m.
Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΟΔ, ΑΓ και ΒΔ.

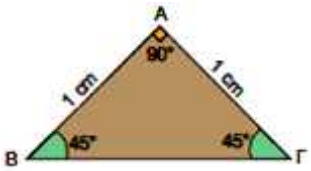


2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

52.Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας 45°.

Απάντηση

Έστω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1 cm. Τότε οι γωνίες της βάσης του είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$ άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

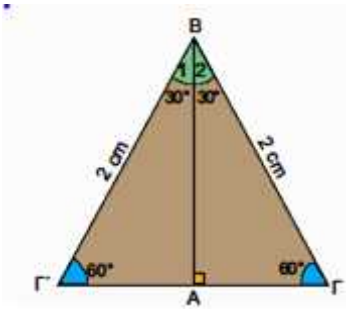
Είναι $\eta\mu 45^\circ = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\varepsilon\varphi 45^\circ = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{1} = 1$

53.Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών 30° και 60°.

Απάντηση

Έστω δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ με κοινή πλευρά την ΑΒ, οξείες γωνίες $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^\circ$ και υποτείνουσες ΒΓ = ΒΓ΄ = 2 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το τρίγωνο ΒΓΓ΄ είναι ισόπλευρο, αφού όλες οι γωνίες του είναι 60°, οπότε: ΓΓ΄ = 2 cm και ΑΓ = ΑΓ΄ = 1cm. $\eta\mu\hat{B}_2 = \eta\mu 30^\circ = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{2}$

Για να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}_2 = 30^\circ$ θα υπολογίσουμε πρώτα την πλευρά ΑΒ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $AB = \sqrt{3}$. Επομένως $\sigma\upsilon\nu\hat{B}_2 = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ακόμα $\varepsilon\varphi\hat{B}_2 = \varepsilon\varphi 30^\circ = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Επίσης, στο ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Είναι $\eta\mu\hat{\Gamma} = \eta\mu 60^\circ = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi 60^\circ = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Βασικές ασκήσεις

55.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 13 cm.

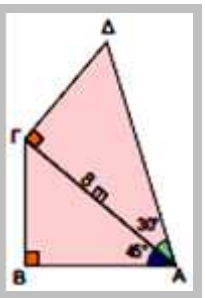
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\hat{A}$ και το $\sigma\upsilon\nu\hat{A}$.

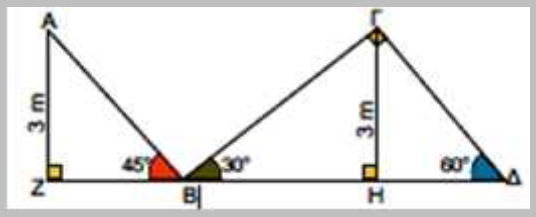
56.Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ + \eta\mu^2 60^\circ = \dfrac{3}{2}$ **β)** $2\eta\mu^2 30^\circ + 2\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ - 2\eta\mu^2 45^\circ = 0$

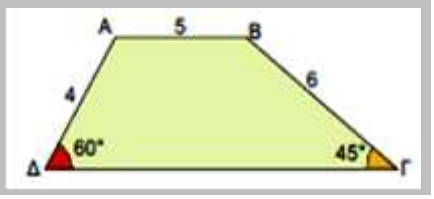
57. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΔ.



58. Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.



59. Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε το μήκος της μεγάλης βάσης ΓΔ.



Κεφάλαιο 3ο – *Μέτρηση κύκλου*

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

54. Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη; Ποιο είναι το αντίστοιχο τόξο της;

Απάντηση

Μια γωνία $x\hat{A}y$ που η κορυφή της Α ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο (Ο, ρ).
Το τόξο του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο της.

55. Με τι είναι ίση κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο; Ποια σχέση συνδέει μια εγγεγραμμένη γωνία με την επίκεντρη που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο;

Απάντηση

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

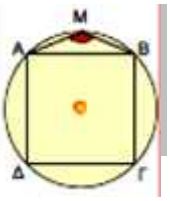
56. Τι σχέση έχουν οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα; Ποια σχέση έχει το μέτρο του τόξου της εγγεγραμμένης γωνίας με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της;

Απάντηση

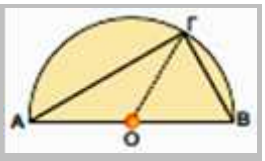
Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Βασικές ασκήσεις

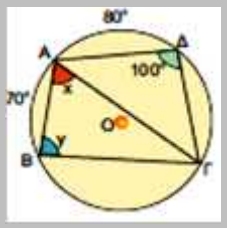
60. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{M}B$.



61. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 2\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



62. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y στο διπλανό σχήμα.



63. Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = 100°$, $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 160°$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}} = 80°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

3.2. Κανονικά πολύγωνα

57. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Απάντηση

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες.

58. Με τι είναι ίση η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου;

Απάντηση

Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $\omega = \frac{360^\circ}{\nu}$.

59. Ποια σχέση συνδέει τη γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου και τη κεντρική γωνία του;

Απάντηση

Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου. Δηλαδή $\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$.

Βασικές ασκήσεις

64. Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

65. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:
α) με κεντρική γωνία ω = 16° **β)** με γωνία φ = 130°.

3.3. Μήκος κύκλου

60. Με τι είναι ίσο το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ ή διαμέτρου δ;

Απάντηση

Το μήκος ενός κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση $L = \pi\delta$ ή $L = 2\pi\rho$.

Βασικές ασκήσεις

66. Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους **β)** οι περίμετροί τους.

67. Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

68. Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν $\rho_A = 2$ cm και $\rho_B = 8$ cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

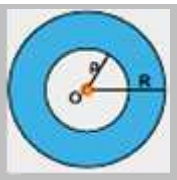
61. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ;

Απάντηση

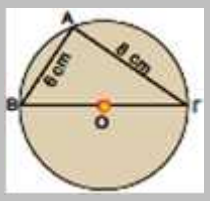
Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $E = \pi\rho^2$.

Βασικές ασκήσεις

69. Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.



70. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



71. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α = 6 cm.

Κεφάλαιο 4ο – *Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών*

4.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

62. Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων;

Απάντηση

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:

- Να είναι παράλληλα.
- Να τέμνονται κατά μία ευθεία.

63. Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις που μπορούν να έχουν δύο διαφορετικές ευθείες;

Απάντηση

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες, οι δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:

- Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

64. Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου;

Απάντηση

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

- Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.
- Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.
- Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

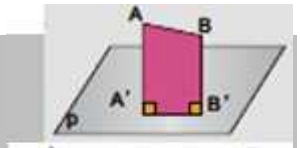
65. Πότε μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο;

Απάντηση

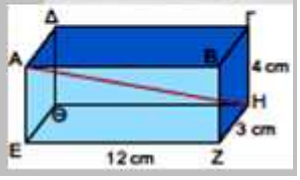
Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

Βασικές ασκήσεις

72. Οι αποστάσεις των σημείων Α,Β από το επίπεδο p είναι ΑΑ΄=20, ΒΒ΄=14. Αν Α΄Β΄=8, να υπολογίσετε το ΑΒ.



73. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

66. Με τι ισούται το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος;

Απάντηση

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή: **Επ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)**

67. Με τι ισούται το ολικό εμβαδό ενός πρίσματος;

Απάντηση

Το ολικό εμβαδόν ενός πρίσματος (Εολ) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας $E_π$ και των εμβαδών $E_β$ των δύο βάσεων. Δηλαδή: $\mathbf{E_{ολ} = E_π + 2E_β}$

68. Με τι ισούται το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου;

Απάντηση

Το εμβαδόν $E_π$ της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με 2πρ) επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή **$E_π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) ή $E_π$ =2πρ · υ**

69. Με τι ισούται το ολικό εμβαδό ενός κυλίνδρου;

Απάντηση

Το ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $E_π$ και τα εμβαδά $E_β$ των δύο βάσεων. Δηλαδή: $\mathbf{E_{ολ} = E_π + 2E_β}$

Βασικές ασκήσεις

74. Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν πρίσματος με ύψος υ = 20 cm και βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm.

75. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm.
β) Έχει διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 6 cm.
γ) Έχει περίμετρο βάσης 15,7 cm και ύψος 32 cm.
δ) Έχει εμβαδόν βάσης 50,24 cm^2 και ύψος 2 dm.

4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

70. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης του όγκου; Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της και ποια σχέση τις συνδέει;

Απάντηση

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m).
Ο όγκος του ισούται με 1 κυβικό μέτρο (m^3). Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:
α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1 dm.
Αφού 1m =10 dm, θα ισχύει ότι: 1 m^3 = 10^3 dm^3 = 1000 dm^3. Αντίστροφα ισχύει ότι: $1dm^3 = 0,001m^3$
β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1cm.
Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm, οπότε 1 m^3 = 10^3 dm^3 = 100^3 cm^3.
Αντίστροφα ισχύει ότι: $1cm^3 = \frac{1}{1000}dm^3 = \frac{1}{1000000}m^3$
γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1mm.
Ισχύει ότι 1m = 10 dm = 100 cm= 1000 mm, οπότε 1 m^3 = 10^3 dm^3 = 100^3 cm^3= 1000^3 mm^3.
Αντίστροφα ισχύει ότι: $1mm^3 = \frac{1}{1000}cm^3 = \frac{1}{1000000}dm^3 = \frac{1}{1000000000}m^3$
Στον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 ως λίτρο (ℓ). Τότε, το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (mℓ).

71.Με τι ισούται ο όγκος ενός κυλίνδρου;

Απάντηση

Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

72.Με τι ισούται ο όγκος ενός πρίσματος;

Απάντηση

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή: **Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)**

Βασικές ασκήσεις

76.Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm έχει ύψος ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του,
γ) τον όγκο του πρίσματος.

77.Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι τετραπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν 432 cm^2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

78.Ένα τετραγωνικό πρίσμα έχει ολικό εμβαδόν που είναι τριπλάσιο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειάς του. Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης του είναι τετραπλάσια από το ύψος του πρίσματος.

79.Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου ο οποίος έχει:
α) ακτίνα βάσης 10 cm και ύψος 1,2 cm. **β)** εμβαδόν βάσης 100 mm^2 και ύψος 0,2 m.

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

73.Ποιο στερεό λέγεται πυραμίδα; Ποια πυραμίδα λέγεται κανονική;

Απάντηση

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή. Μια πυραμίδα λέγεται κανονική, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

74.Με τι ισούται το ολικό εμβαδόν μιας πυραμίδας;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας Εολ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης Εβ. Δηλαδή $\mathbf{E_{ολ} = E_{π} + E_{β}}$.

75.Τι ονομάζεται απόστημα της κανονικής πυραμίδας;

Απάντηση

Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται απόστημα της κανονικής πυραμίδας.

76.Με τι ισούται το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κάθε κανονικής πυραμίδας;

Απάντηση: $\mathbf{E_{π} = \frac{1}{2}(περίμετρος\ βάσης) \cdot απόστημα}$

77.Να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζουμε τον όγκο V της πυραμίδας.

Απάντηση: $\mathbf{V = \frac{1}{3}(Εμβαδόν\ βάσης) \cdot (ύψος)}$

Βασικές ασκήσεις

80.Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 12 cm και ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

81.Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm και το ύψος της παράπλευρης έδρας της είναι 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν:
α) της παράπλευρης επιφάνειας, **β)** της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

82.Ένα τετράεδρο έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

78.Ποιο στερεό λέγεται σφαίρα;

Απάντηση

Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.

79.Με τι ισούται το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας;

Απάντηση

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της. Δηλαδή $\mathbf{E_{σφ} = 4πρ^2}$

80.Να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζουμε τον όγκο V της σφαίρας.

Απάντηση: $\mathbf{V = \frac{4}{3}πρ^3}$

Βασικές ασκήσεις

83.Να βρείτε την ποσότητα του χρώματος που χρειάζεται, για να βαφεί σφαιρική δεξαμενή ακτίνας ρ = 10 m, αν το ένα κιλό χρώματος βάφει επιφάνεια 8 m^2.

84.Σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου χωράει ακριβώς μια σφαίρα με ακτίνα 40cm. Να βρείτε το μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο.

Επαναληπτικές ασκήσεις

85. Να λύσετε τις εξισώσεις:

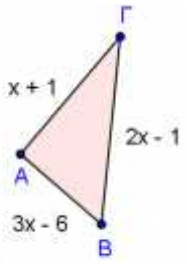
α) $x-\frac{5(1-x)}{2}-\frac{2-3(1-2x)}{6}=0$ **β)** $\frac{20-x}{2}-\frac{7x}{6}=30-2x$

86. Στο διπλανό σχήμα , το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 12.

α) Να βρείτε τον αριθμό x.

β) Για x = 3 , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

γ) Για x = 3 να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



87. Στο ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι

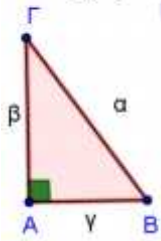
$\alpha=\sqrt{17+\sqrt{61+\sqrt{9}}}$ και $\gamma=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=5$ και $\gamma=3$.

β) Να υπολογίσετε τη πλευρά β.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου που έχει διάμετρο την ΑΒ.

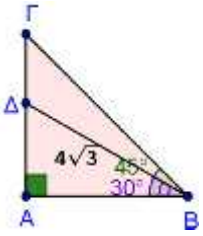


88. Στο διπλανό σχήμα είναι ΒΔ = $4\sqrt{3}$ cm, $A\hat{B}\Gamma=45^\circ$ και $A\hat{B}\Delta=30^\circ$.Να αποδείξετε ότι

α) ΑΔ= $2\sqrt{3}$ cm

β) ΑΒ= 6cm

γ) ΒΓ = $6\sqrt{2}$ cm



89. Να βρείτε τις τιμή της παράστασης $A=(x+3)\cdot 2^{-x+1}-5\cdot 2^{x+1}+8\cdot 2^x-x^2-3$ όταν $x=-1$.

90. Δίνονται οι παραστάσεις :

$A=2\cdot(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-3\cdot 2^3$, $B=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+(-2)^2+\left(3^{1821}-156\right)^0+2^{65}:2^{63}$

α) Να υπολογίσετε τα Α και Β.

β) Βρείτε τον αντίθετο του Α και τον αντίστροφο του Β.

γ) Να εξετάσετε αν ο Α είναι ρίζα της εξίσωσης $\frac{x+2}{3}-\frac{2-3x}{2}=7$

91. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{2(x-5)}{5}-\frac{x}{2}<x-\frac{2x-7}{10}$ και $2(3x-1)-(4-2x)\le 2$

α) όταν ο x είναι πραγματικός αριθμός και **β)** όταν οχχ είναι ακέραιος αριθμός

92. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $4-5(x-2)\ge 13-3(x+1)$ και $\frac{x-1}{2}>1+x$.

93.α) Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{3-2x}{6}-\frac{3(x-1)}{2}\ge\frac{x}{6}-12$ και να παραστήσετε τις λύσεις της πάνω σε ένα άξονα.

β) Να εξετάσετε αν η τιμή της παράστασης $A=\frac{\sqrt{81}+\sqrt{25}+\sqrt{49}}{\sqrt{64}+2\sqrt{36}+\sqrt{(-1)^2}}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος .

94. Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

95. Δίνεται η ευθεία $y = x - 3$

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της
β) Να τη σχεδιάσετε σε ένα σύστημα αξόνων.

x	0	1		
y			0	-1

96. Δίνεται η ευθεία ε: $y = x + 2$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας δ που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Τα σημεία τομής Μ, Ν της ε με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.
γ) Την ευθεία ζ που διέρχεται από το Ν και είναι παράλληλη στον x΄x.

97. Δίνεται η ευθεία ε: $y = -2x + 4$.

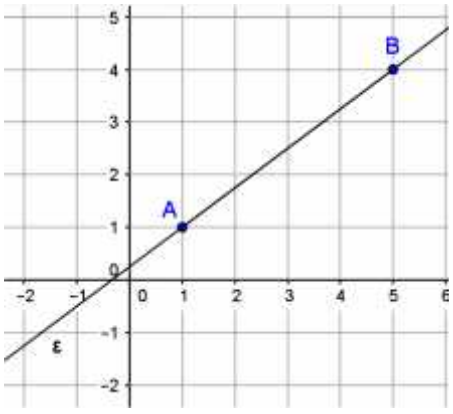
α) Να βρείτε τα σημεία Α και Β στα οποία η ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ η οποία είναι παράλληλη στην ε και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0,6)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ στο οποίο η δ τέμνει τον x΄x.
γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση των ευθειών δ και ε.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία τομής των ευθειών δ και ε με τους άξονες (τετράπλευρο ΑΒΓΔ).

98. Μια ευθεία (ε) έχει κλίση −3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας (ε).
β) τα σημεία Β, Γ στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες.
γ) την απόσταση ΒΓ.
δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
ε) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β του τριγώνου ΒΟΓ.

99. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια ευθεία ε και δύο σημεία της Α,Β.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α,Β.
β) Να βρείτε την απόσταση ΑΒ.
γ) Να βρείτε την κλίση της ε.
δ) Να βρείτε την εξίσωση της ε.
ε) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.



100. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1,2)$.

β) Αν το σημείο $B\left(\frac{\lambda-4}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\right)$ ανήκει στη προηγούμενη ευθεία να βρείτε το λ.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ε και τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τεταγμένη 3.

101. Μια ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2,6)$.

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $B(-5,10)$ και $\Gamma(100,300)$ ανήκουν στην ευθεία ε.

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_1 παράλληλης της ε που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,-2)$.

102. Έστω ευθεία ε με εξίσωση $y = 2\lambda x + 3$ η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.

γ) Αν η ε διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{2\alpha-3}{3}, \frac{\alpha-1}{2}\right)$, να βρείτε τον αριθμό α.

δ) Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων την ε.

103. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μία διάσταση είναι διπλάσια από την άλλη και η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm.

α) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι ίση με την διαγώνιο του παραπάνω ορθογωνίου.

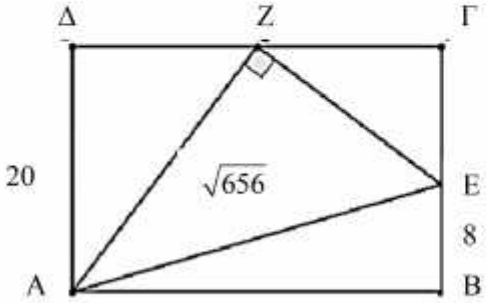
104. Να βρείτε το ύψος του διπλανού ισοσκελούς τραπεζίου που έχει ΔΓ = 8 cm, ΑΒ = 16 cm και περίμετρο Π = 34 cm.

105. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ. Να υπολογίσετε:

α) την ΔΓ

β) την ΑΕ

γ) το εμβαδό του τριγώνου ΖΕΑ.



106. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 60^\circ$ το ύψος ΑΔ = 8 cm και το τμήμα ΔΓ = 6 cm.

α) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ.

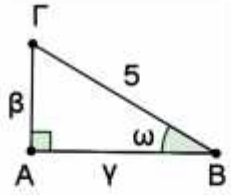
β) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

107. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^o$) είναι ημω = 0,8 και ΒΓ = 5m. Να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των πλευρών β και γ.

β) Τα συνω και εφω.

γ) Το εμβαδό του ημικυκλίου με διάμετρο την πλευρά ΑΒ .



108. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ=8cm και περίμετρο 18cm.

Να βρείτε το ύψος του , το εμβαδό του καθώς και τους τριγωνομετρικούς αριθμού της γωνίας $\hat{B}$.

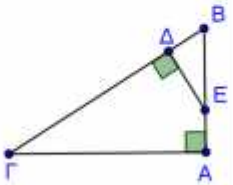
109. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.

Επιπλέον έχουμε: ΑΒ= 6cm ,ΑΓ= 8cm , ΑΕ=1 cm, ΔΓ=7 cm .

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων: ΒΓ, ΒΕ, και ΒΔ.

β) Να υπολογιστεί το τμήμα ΔΕ

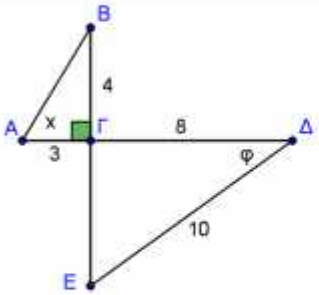
γ) Να υπολογιστεί η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΕΔΓ.



110. Στο διπλανό σχήμα οι ΑΔ και ΒΕ είναι κάθετες , ακόμη ΒΓ=4 cm ΓΔ = 8cm, ΔΕ=10cm, και ΑΓ=3cm.

α) Να υπολογίσετε τις ΓΕ και ΑΒ.

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\hat{x}$ και $\hat{\varphi}$.



111. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=20 και $\hat{A} = 120^{\circ}$.
Να υπολογίσετε :

α) τις γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ **β)** το ύψος ΑΔ **γ)** την πλευρά ΒΓ

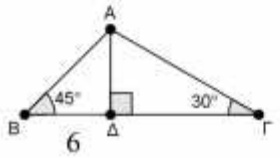
δ) το εμβαδόν του τριγώνου **ε)** την περίμετρό του.

112. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι , και ΒΔ = 6cm, $\hat{B} = 45^{\circ}$ και $\hat{\Gamma} = 30^{\circ}$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος του ΑΔ.

β) Τα μήκη των ΑΓ και ΓΔ.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



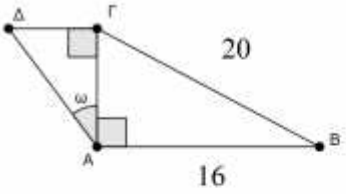
113. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = 16 cm και ΒΓ = 20 cm.
Αν εφω = 0,5, να υπολογίσετε:

α) την εφΒ.

β) την πλευρά ΓΔ.

γ) την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

δ) το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



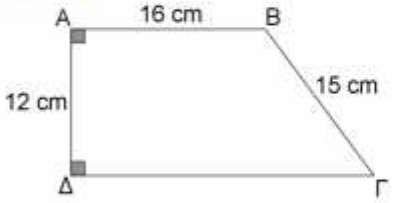
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

114. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε:

α) το μήκος του τμήματος ΒΔ.

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

γ) τη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$

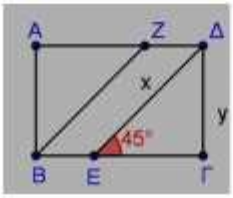


115. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^{\circ}\right)$ δίνονται ΑΒ=24cm και $συνΓ = \frac{4}{5}$.Να υπολογιστούν οι πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου.

116. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΒΓ= 8cm και ΕΓ= 6 cm.
Αν το ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο με $\Gamma\hat{E}\Delta = 45^{\circ}$ τότε :

α) να υπολογίσετε τα μήκη ΕΔ= x και ΔΓ= y.

β) Να βρείτε τα εμβαδά των ΑΒΓΔ και ΒΕΔΖ .



117. Έστω ΑΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ με $AB = 10cm$, $B\Delta = x$, $\Delta\Gamma = x + 9$ και $συνB = \frac{3}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $x = 6$.

β) Να δείξετε ότι $A\Delta = 8$ cm

γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.

δ) Να δείξετε ότι $A\Gamma = 17cm$.

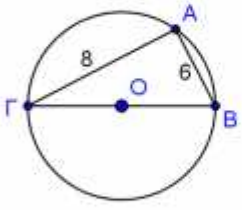
ε) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

118. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΓ = 8cm και ΑΒ= 6cm.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

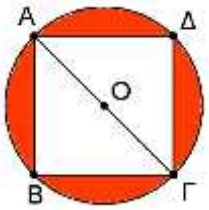
β) Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου καθώς και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.



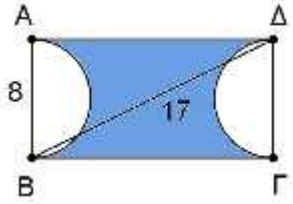
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

119. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $2\sqrt{2}$ cm και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Να βρείτε :



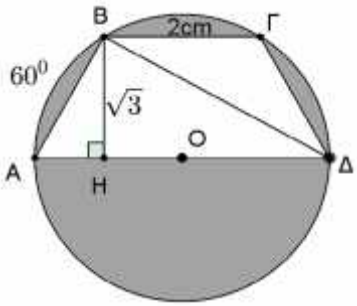
α) Τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου.
β) Το μήκος του κύκλου.
γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
δ) Το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής.

120. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ= 8cm, ΒΔ= 17cm Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ σχεδιάζουμε ημικύκλια εσωτερικά του ορθογωνίου. Να υπολογίσετε:



α) Την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
β) Τη περίμετρο και το εμβαδόν του κάθε ημικυκλίου,
γ) Το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

121. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο με μικρή βάση $B\Gamma = 2cm$ και ύψος $BH = \sqrt{3}$ cm, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΔ. Το μέτρο του τόξου είναι ΑΒ είναι 60°.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.
β) Να εξηγήσετε γιατί $A\hat{B}\Delta = 90°$.
γ) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ του τραπεζίου.
δ) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 4cm$.
ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου.
στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
ζ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.

122. Ένας κύλινδρος έχει ύψος $\upsilon = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1} + \frac{9}{5}$ cm και ακτίνα βάσης ρ = 1 cm.

α) Να δείξετε ότι υ = 2 cm.
β) Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.