

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ –

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A1 Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Mov_5

A2 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών . *Mov_10*

A3 Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις, με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος**

a. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε, σε κάθε

περίπτωση ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$. *Mov_2*

b. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ τότε το όριο

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ είναι καλά ορισμένο και είναι ίσο, πάντα, με το 0. *Mov_2*

c. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε οπωσδήποτε η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . *Mov_2*

d. Ισχύει ότι $|z\bar{z}| = z\bar{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ *Mov_2*

e. Κάθε συνάρτηση, που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Mov_2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(ax^2 + x + 1) - \ln((1+a)x + a)$, $x > 0$ και $a \geq 0$.

B1 Για κάθε $a \geq 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ *Mov_6*

Δίνεται ακόμα ότι $a = 0$. Τότε:

B2 Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. *Mov_4*

B3 Να ορίσετε την αντίστροφη της f *Mov_5*

B4 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f *Mov_4*

B5 Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2 + f(x^2) < f(x) + f(x^7)$ στο $(0, +\infty)$ *Mov_6*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$

Γ1 Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 5$ Mov_4

Γ2 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2012} + z_2^{2012}$ είναι πραγματικός Mov_4

Αν επιπλέον $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ είναι οι εικόνες των z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i)$, τότε:

Γ3 Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές Mov_6

Γ4 Αν $|u - z_1| = |\bar{u} - z_1|$ να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$ Mov_5

Γ5 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις εικόνες των μιγαδικών w που επαληθεύουν τη σχέση $|w - z_2 + 2| + |\bar{w} - z_2 + 2| = 10$ Mov_6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 0$

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 2$ Mov_3

Δ2 Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{\eta \mu^2 x}$ Mov_5

Αν επιπλέον για την f ισχύει: $f^2(x) - e^{-x}f(x) = e^{2x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ3 Να δείξετε ότι: $f(x) = e^{-x} + e^x$, $x \in \mathbb{R}$ Mov_5

Δ4 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 2}{2 - \sigma v x}$. Mov_8

Δ5 Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ Mov_4